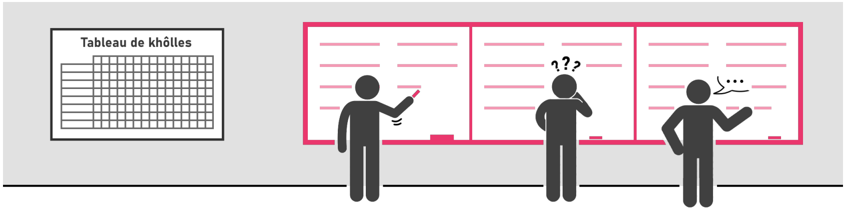

SUJETS DE COLLES 01

1. Questions de cours.

- Donner la définition d'un intervalle stable.
- Énoncer le théorème des encadrements.
- Démontrer que si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ et si $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} y_n$,
$$u_n x_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n y_n.$$
- Donner la définition d'une suite négligeable devant une autre
- Énoncer sans preuve le théorème des suites adjacentes.
- Démontrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si
$$u_n - v_n = \underset{n\to\infty}{\mathbf{o}}(v_n).$$
- Qu'est-ce qu'un point fixe pour une application f ?
- Énoncer le théorème du point fixe.
- Montrer que si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, alors $(u_n)^\alpha \underset{n\to\infty}{\sim} (v_n)^\alpha$ pour tout réel α.

2. Exercices classiques.

Exercice 1
Donner un équivalent et la limite des suites suivantes :

- $a_n = \dfrac{n^2 - 3^n}{2^n - n^3}$.
- $b_n = \dfrac{n}{2}\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$.
- $c_n = \dfrac{\ln(n^2) - (\ln(n))^2}{\sqrt{n}+2}$.
- $d_n = (5n - 2\sqrt{n})\left(\sqrt{1-e^{-n}} - 1\right)$.
- $e_n = \dfrac{0,5^n - n^{0,5}}{2\ln(n) - 3n + 1}$.
- $f_n = (\sqrt{n} - n)\left(e^{\frac{-3}{n}} - 1\right)$.

Exercice 2
Une compagnie de trains subit des retards pendant une journée : si un train est en retard, le train suivant sera en retard avec la probabilité 0,85, et si un train est à l'heure, le train suivant sera en retard avec la probabilité 0,25.

Le premier train part à l'heure. Calculer la probabilité que le n^{e} train soit en retard.

On notera R_n : "le n^{e} train est en retard", et on commencera par exprimer $P(R_{n+1})$ en fonction de $P(R_n)$.

Exercice 3

1. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, montrer que l'équation
$$x + \ln(x) = n$$
possède une unique solution, notée x_n, dans $\mathbb{R}_+^*$.
Calculer x_1.
2. Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.
3. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $n - \ln(n) \leqslant x_n \leqslant n$.
4. En déduire un équivalent de x_n, puis sa limite.

Exercice 4

On considère les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = -2x_n + y_n \\ y_{n+1} = 2x_n - 3y_n \end{cases}$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$.

2. En déduire une expression de x_n puis de y_n en fonction de n.

3. Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ?

Exercice 5

Soit $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. **a.** Montrer que f possède un unique point fixe $\lambda \in [0;1]$.

b. Montrer que $[0;1]$ est stable par f.

c. Montrer que $\forall x \in [0;1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$.

2. **a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \lambda| \leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}|u_n - \lambda|.$$

c. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 6

On considère la suite définie par : $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$.

1. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

2. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 7

Soit la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. On pose $f(x) = \sqrt{x+1}$.

1. **a.** Montrer que $[0,2]$ est stable par f et que $\forall x \in [0,2]$, $\quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$

b. Déterminer les points fixes de f. On note r l'unique point fixe tel que $r \in [0,2]$.

2. **a.** Montrer que $\forall\ n \geqslant 0$, $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad |u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{|u_n - r|}{2}$ puis que $|u_n - r| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

c. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 8

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + n\,x.$$

On appelle C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité 5 cm.

1. **a.** Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f''(x)$.

b. En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2. **a.** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$.

b. Montrer que les droites (D_n) et (D_n') d'équations $y = nx$ et $y = nx + 1$ sont asymptotes de (C_n)

c. Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n de (C_n).

d. Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en A_1, puis tracer sur un même dessin les droites (D_1), (D_1') et (T_1) ainsi que l'allure de la courbe (C_1).

3. **a.** Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.

b. Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{-1}{n} < u_n < 0$.

c. En déduire la limite de la suite (u_n)

d. En revenant à la définition de u_n, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2n}$.

3. Exercices plus difficiles.

Exercice 9

Soit $f_n(x) = x^n + x - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0, 1[$.

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$. En déduire la monotonie de la suite (x_n).

3. Établir que (x_n) converge, et que sa limite ℓ vérifie : $0 < \ell \leqslant 1$.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \leqslant \ell$.

En procédant par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.

Exercice 10

Montrer que la suite définie par $x_0 = 1$ et

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + n(x_n)^2}$$

converge vers 0.

Exercice 11

Montrer que le nombre

$$\left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - (\frac{1}{4} - \cdots)^2\right)^2\right)^2\right)^2$$

existe et calculer sa valeur.

On pourra être amené à introduire astucieusement une suite récurrente dont le nombre à calculer est la limite.

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$. On définit la suite récurrente par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

1. Étudier la continuité de f, dessiner son graphe.

2. Discuter la monotonie et la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de u_0.